高等代数作业注意点

主讲: 郭辉
助教: 曹杰

2025 年 6 月 18 日

第 1 次作业

6.1 节 3, 4, 6

6.2 节 2, 3

6.3 节 3, 6, 8

补充 1. 判断向量 $\boldsymbol{\beta} = (1, 2, 0, -2)$ 是否可由向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1, 0),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 1, 1),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (0, 1, 1, 1)$$

线性表示.

补充 2. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关.

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0),\ \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{\beta}_3 = (-1, 2, 0),\ \boldsymbol{\beta}_4 = (0, 2, -1).$$

补充 3. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, 3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3, 1, 2).$$

6.4 节 1(ii), 2(i), (ii), 4

第 2 次作业

6.4 节 8

6.5 节 2(iii), 3, 4

6.6 节 2

6.7 节 2, 3

补充. 求以下向量组的秩和一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\6\\0\\-8\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\-8\\5\\-2\\11\end{pmatrix}.$$

第 3 次作业

6.7 节 5

补充. 求下列非齐次线性方程组的通解及其导出齐次方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7,\\9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13.\end{cases}$$

第 4 次作业

7.1 节 4 (并求 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的一个基和 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一个基)

第 5 次作业

7.2 节 3, 6

7.3 节 2, 5, 7

第 6 次作业

7.4 节 2, 3

第 7 次作业

7.5 节 1(ii), (iii), 5, 6

7.6 节 1(ii), (iii), 2, 4

第 8 次作业

8.1 节 1, 6, 7, 8

第 9 次作业

8.2 节 1, 3, 7, 10

第 10 次作业

8.3 节 4, 5, 6

第 11 次作业

8.4 节 2

补充. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 U, 使得 $U^{\mathrm{T}}AU$ 是对角矩阵.

8.5 节 3

第 12 次作业

9.1 节 2(ii), 3

9.2 节 1, 6

第 13 次作业

9.3 节 2, 3

9.4 节 2

6.1 定义与例子

4. 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中的每一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的形式, 这里 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$.

需要说明表示的存在性与表示的唯一性.

表示的存在性. 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3$. 则存在 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$. 于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=(a_1,a_2,a_3)\\&=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)\\&=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3.\end{aligned}$$

这就说明了题目要求的表示的存在性.

表示的唯一性略.

6. 证明: 数域 F 上一个向量空间如果含有一个非零向量, 那么它一定含有无限多个向量.

由第 25 页定理 1.5.1 可知 F 包含有理数域，从而 F 是无限集.

设 V 是 F 上一个有非零向量的向量空间. 则在 V 中可以取一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 由第 214 页命题 6.1.2(4) 可知对于 F 中不同的两个数 a_1 与 a_2, 我们有 $a_1\boldsymbol{\alpha}\neq a_2\boldsymbol{\alpha}$.

这样我们就构造了 V 中的无限多个向量 $\{a\boldsymbol{\alpha}\mid a\in F\}$.

6.2 子空间

3. 设 W_1,W_2 是向量空间 V 的子空间. 证明: 如果 V 的一个子空间既包含 W_1 又包含 W_2, 那么它一定包含 W_1+W_2.

转化为更加具体的表述: 设 W 是 V 的一个既包含 W_1 又包含 W_2 的子空间, 需要证明 $W_1+W_2\subset W$.

任取 $x\in W_1$, $y\in W_2$. 则 $x\in W$, $y\in W$. 因为 W 是子空间, 所以关于加法封闭, 从而 $x+y\in W$. 这就证明了 $W_1+W_2\subset W$.

6.5 坐标

4. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 3),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, -1, 0);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, 5),\ \boldsymbol{\beta}_2 = (-2, 3, 1),\ \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 3, 2).$$

证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基. 求前者到后者的过渡矩阵.

计算过程与本节例 5 一样: 先分别求出关于标准基的过渡矩阵. 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1).$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =: (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)A,$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)B.$$

于是 $|A| = 8$, $|B| = -34$. 从而

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B.$$

因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

过渡矩阵的定义参见第 238 页.

```
% matlab验算
A = sym(...
[ 1   0   1
  2  -1  -1
 -1   3   0]);
B = sym(...
[ 2  -2   1
  1   3   3
  5   1   2]);
```

```
det(A)
det(B)
inv(A)*B
```

6.6 向量空间的同构

2. 设 $f: V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个同构映射, V_1 是 V 的一个子空间. 证明 $f(V_1)$ 是 W 的一个子空间.

本题主要考察子空间的定义: 关于加法和数乘封闭.

任取 $\beta_1, \beta_2 \in f(V_1)$, $k_1, k_2 \in F$. 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$ 使得 $f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$. 于是

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) = f(k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2) \in f(V_1).$$

6.7 矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间

2. 证明: 秩$(A+B) \le$ 秩$(A) +$ 秩(B).

证明 1. 设 A, B 是 $m \times n$ 型矩阵. 考虑 A, B 的列向量. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

设 A 的秩为 r, 取 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 的一个极大无关组 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$.

设 B 的秩为 s, 取 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 的一个极大无关组 $\{\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}\}$.

$A+B$ 的列向量组 $\{\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n\}$ 可由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ 线性表出, 进而可由 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}\}$ 线性表出. 因此

$$\text{秩}(A+B) \le \text{秩}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}\} \le r+s = \text{秩}(A) + \text{秩}(B).$$

注意区分上面标彩色的下标.

证明 2 (来自某同学).

$$r(A)+r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix}$$
$$\ge r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix} \ge r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A+B & 0 \end{pmatrix} = r(A+B).$$

注. 部分同学尝试用第 248 页上的对角化来做这个题目. 设 A, B 是 $m \times n$ 型矩阵, 秩分别为 r, s. 考虑对角化

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1, \ B = P_2 \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2.$$

因为 $P_1 = P_2$ 且 $Q_1 = Q_2$ 不一定成立, 所以无法进一步化简 $A + B$.

3. 设 A 是一个 m 行的矩阵, 秩$A = r$. 从 A 中任取出 s 行, 作一个 s 行的矩阵 B. 证明: 秩$B \geq r + s - m$.

设 A 的行向量组为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. 取 A 的一个极大无关组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, 其余的 $m - r$ 个向量记作 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$.

由题目, A 中取了 s 行构成矩阵 B. 设 s_1 行在 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 中取, 其他 $s - s_1$ 行在 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$ 中取.

那么, 秩$B \geq s_1$ 且 $s - s_1 \leq m - r$. 于是, 秩$B \geq s_1 \geq r + s - m$.

补充. 求以下向量组的秩和一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

```
% matlab验算
A = [
 0  1 -1  3
 2 -3  2 -8
 6  2 -5  5
 0  0  0 -2
-8  4  0 11];
rank(A)
rank(A(:,[1 2 3]))
rank(A(:,[1 2 4]))
rank(A(:,[1 3 4]))
rank(A(:,[2 3 4]))
ans =
        3
```

```
ans =
       2
ans =
       3
ans =
       3
ans =
       3
```

补充. 求下列非齐次线性方程组的通解及其导出齐次方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1, \\ x_4=1. \end{cases}$$

将 x_2, x_3 作为自由变量, 则我们有通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

我们知道通解由线性方程组唯一确定, 但是它的表示可能不唯一. 比如, 通过某个计算过程, 我们可能得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

平时的计算容易算错, 但是我们可以把结果代回原方程组进行验算, 以减少计算错误.

特解代回去, 成立.

基础解系代回齐次方程组, 成立.

基础解系线性无关, 成立.

基础解系中向量个数 = 未知数个数 − 矩阵的秩, 成立.

一般验证前面三个. 第四个要算矩阵的秩, 有点麻烦, 可以不进行. 如果验证后前面三个都对, 基本上就计算正确了.

PS. 批改作业时: 是否与已有答案一致. 不一致的话: 特解代回去, 基础解系代回齐次方程组, 基础解系线性无关, 基础解系向量个数 = 参考答案的基础解系向量个数.

7.2 线性变换的运算

> 3. 设 V 是数域 F 上一个有限维向量空间. 证明, 对于 V 的线性变换 σ 来说，下列三个条件是等价的:
>
> (i) σ 是满射; (ii) $\mathrm{Ker}(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$; (iii) σ 非奇异.
>
> 当 V 不是有限维时, (i), (ii) 是否等价?

当 V 不是有限维时, (i), (ii) 不等价. 举例如下.

考虑 $F[x]$, 它是 F 上的无限维向量空间. 令 D 为求导确定的线性变换. 即

$$\begin{array}{rccc} D: & F[x] & \longrightarrow & F[x] \\ & f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

则 D 是满射, 但不是单射.

注意多项式 f 及其导数 f' 的定义域都为 F, 与 D 的定义域是不一样的.

$$\begin{array}{rccc} f: & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f': & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

7.4 不变子空间

3. 设 σ 是数域 F 上向量空间 V 的一个线性变换, 并且满足条件 $\sigma^2=\sigma$. 证明:

(i) $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{\xi-\sigma(\xi)\mid\xi\in V\}$;

(ii) $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$;

(iii) 如果 τ 是 V 的一个线性变换, 那么 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 和 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 都在 τ 之下不变的充要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

下面讨论一下 (ii).

设 $\xi\in V$. 则 $\xi=\xi-\sigma(\xi)+\sigma(\xi)$. 由 (i) 可得 $\xi-\sigma(\xi)\in\mathrm{Ker}(\sigma)$. 显然 $\sigma(\xi)\in\mathrm{Im}(\sigma)$. 因此 $\xi\in\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma)$. 从而 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma)$.

任取 $\xi\in\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)$. 则 $\sigma(\xi)=0$, 且存在 $\alpha\in V$ 使得 $\xi=\sigma(\alpha)$. 从而 $0=\sigma(\xi)=\sigma(\sigma(\alpha))=\sigma(\alpha)=\xi$. 因此 $\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)=\{0\}$. 这就证明了 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$.

注 1. 如果 V 是有限维向量空间. 由定理 6.4.5

$$\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma))=\dim(\mathrm{Ker}(\sigma))+\dim(\mathrm{Im}(\sigma))-\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma))$$

以及 7.1 节习题 5(ii)

$$\dim(V)=\dim(\mathrm{Ker}(\sigma))+\dim(\mathrm{Im}(\sigma))$$

可得 $\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma))=0$ 等价于 $\dim(V)=\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma))$. 从而 $\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)=\{0\}$ 等价于 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma)$. 因此只要证明了 $\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)=\{0\}$ 与 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma)$ 中的一个, 就可得出 (ii).

注 2. 高等代数课程主要关心有限维向量空间的性质. 但有时也会涉及任意维数的向量空间. 做题时要注意题目有没有假设向量空间是有限维的.

对于数域 F 上的向量空间 V, 6.4 节中定义基时要求是一个有限个元素的向量组. 设 V 是无限维向量空间, 按照这个定义 V 没有基. 无限维向量空间主要是泛函分析课程考虑的对象. 基的更多讨论可参见

https://encyclopedia.thefreedictionary.com/Basis+(linear+algebra)

7.5 本征值和本征向量

6. 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上一个 n 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征根 (重根按重数计算).

(i) 如果 $f(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上任意一个次数大于零的多项式, 那么 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征根;

(ii) 如果 A 可逆, 那么 $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 并且 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征根.

本题考虑重根按重数计算. 这时, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征根等价于 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$. 同样地, $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征根等价于 $|\lambda I - f(A)| = (\lambda - f(\lambda_1)) \cdots (\lambda - f(\lambda_n))$. 比较简单的证明方法就是利用上一题 (7.5 节第 5 题) 的结论.

存在 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 阶可逆矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, $a_m \neq 0$, $m \geq 1$. 则

$$\begin{aligned} T^{-1} f(A) T &= T^{-1}(a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m) T \\ &= a_0 I + a_1 T^{-1}AT + \cdots + a_m (T^{-1}AT)^m \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此, $|\lambda I - f(A)| = (\lambda - f(\lambda_1)) \cdots (\lambda - f(\lambda_n))$. 这就证明了 (i).

对于 (ii), 如果 A 可逆, 那么 $T^{-1}AT$ 也可逆, 从而 $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$,

且

$$T^{-1}A^{-1}T = (T^{-1}AT)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此, $|\lambda I - A^{-1}| = (\lambda - \lambda_1^{-1}) \cdots (\lambda - \lambda_n^{-1})$. 这就证明了 (ii).

7.6 可以对角化的矩阵

1(iii). 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

问: A 是否可对角化? 如果可对角化, 求出过渡矩阵 T.

本题 A 可对角化. 由于对角化后的矩阵不一定唯一, 需要在取完 T 后计算一下对角矩阵 $T^{-1}AT$. 令

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$AT = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

如果取

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

则

$$AT = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

```
% matlab验算
A = sym([
 3  6   6
 0  2   0
-3 -12 -6 ]);
[V,D] = eig(A)
V =
[-2, -1,    4]
[ 0,  0, -5/3]
[ 1,  1,    1]
D =
[0,  0, 0]
[0, -3, 0]
[0,  0, 2]
```

4. 数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换 σ 叫作一个对合变换, 如果 $\sigma^2 = \iota$, ι 是单位变换. 证明:

(i) σ 的本征值只能是 ± 1;

(ii) $V = V_1 \oplus V_{-1}$, 这里 V_1 是 σ 的属于本征值 1 的本征子空间, V_{-1} 是 σ 的属于本征值 -1 的本征子空间.

提示: 设 $\alpha \in V$, 则 $\alpha = \frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2} + \frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}$.

本题的证明不是很困难. 按照定义来做即可.

注意一下本征值与特征根 (或特征值) 的区别.

在第 279 页上定义了线性变换的本征值: 设 V 是数域 F 上的一个向量空间. 设 $\sigma: V \to V$ 是一个线性变换. 设 $\lambda \in F$. 如果存在 V 中的非零向量 ξ 使得 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$, 那么 λ 就叫作 σ 的一个本征值.

设 n 是一个正整数. 设 V 是 F 上一个 n 维向量空间. 那么线性变换 $\sigma: V \to V$ 至多有 n 个本征值. 甚至有可能线性变换 $\sigma: V \to V$ 没有本征值. 试举一个没有本征值的线性变换的例子.

在第 282 页上定义了矩阵的特征根: 设 A 是数域 F 上的一个 n 阶矩阵. 即 $A \in M_n(F)$. 因为 $F \subset \mathbb{C}$, 所以 $M_n(F) \subset M_n(\mathbb{C})$. 因此 $A \in M_n(F) \subset M_n(\mathbb{C})$. 我们把 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在 $\mathbb{C}$ 内的根叫作矩阵 A 的特征根.

根据代数基本定理, n 阶矩阵 A 有 n 个特征根.

8.1 向量的内积

1. 证明, 在一个欧氏空间里, 对于任意向量 ξ, η, 以下等式成立:

(i) $|\xi+\eta|^2+|\xi-\eta|^2=2|\xi|^2+2|\eta|^2$;

(ii) $\langle\xi,\eta\rangle=\frac{1}{4}|\xi+\eta|^2-\frac{1}{4}|\xi-\eta|^2$.

在解析几何里, 等式 (i) 的几何意义是什么?

很多同学漏看了这个题目的最后一行.

6. 设 α_1, α_2, $\dots$, α_n, β 都是一个欧氏空间的向量, 且 β 是 α_1, α_2, $\dots$, α_n 的线性组合. 证明如果 β 与每一个 α_i 正交, $i=1,2,\dots,n$, 那么 $\beta=\mathbf{0}$.

这题涉及了线性组合, 下一题涉及线性相关.

设 β 是 α_1, α_2, $\dots$, α_n 的线性组合, 那么存在 $k_1,k_2,\dots,k_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$. 这里 $k_1,k_2,\dots,k_n$ 可能都是零.

设 α_1, α_2, $\dots$, α_n 线性相关, 那么存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\dots,k_n\in\mathbb{R}$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$.

另外, 无论 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是否线性相关, 都有 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_n=\mathbf{0}$.