高等代数作业注意点

主讲: 方颖珏
助教: 曹杰

2025 年 6 月 18 日

第 1 次作业

6.3 节 3, 4, 8

补充. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,1,2).$$

第 2 次作业

6.4 节 4, 8

第 3 次作业

6.5 节 3, 4

第 4 次作业

6.6 节 2

6.7 节 3, 5

第 5 次作业

7.1 节 4, 5

7.2 节 3, 6

第 6 次作业

7.3 节 2, 5

7.4 节 2, 3

第 7 次作业

7.5 节 1(ii), 5

7.6 节 1(ii), 2, 4

第 8 次作业

8.1 节 1(i), 4, 7, 8

第 9 次作业

8.2 节 1, 3, 7, 10

第 10 次作业

8.3 节 4, 5

第 11 次作业

8.4 节 2, 6(i)

第 12 次作业

9.1 节 1

补充. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

分别使用初等行列变换法和向量组正交化方法求一可逆矩阵 P, 使 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角矩阵.

9.2 节 1, 5

第 13 次作业

9.4 节 2, 3

6.3 向量的线性相关性

3. 令 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in F^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. [a] 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

[a] 原题记号修改: 将 $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}) \in F^n$ 修改为

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in F^n.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \ldots, k_n \in F$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$. 写成矩阵的形式, 就是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

或者

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

注意这里的两个矩阵相差一个转置, 容易搞混.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in F^n$, $i = 1, \ldots, m$ 线性无关. 对每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 任意添上 p 个数, 得到 F^{n+p} 的 m 个向量

$$\boldsymbol{\beta}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_{i1}, \ldots, b_{ip}), i = 1, \ldots, p.$$

证明 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 也线性无关.

两种方法: 第一种用向量表示; 第二种用分量表示.

用向量表示. 设 $\boldsymbol{\gamma}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{ip}), i = 1, \ldots, p$. 则

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\gamma}_i), i = 1, \ldots, p.$$

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}_m = 0_{n+p}$, $k_1, k_2, \ldots, k_m \in F$. 则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m, k_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\gamma}_m) = (0_n, 0_p).$$

从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0_n$. 由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关可得 $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 从而 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 线性无关.

用分量表示. 方法类似, 注意区分不同的下标.

8. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示, 但不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}\}$ 线性表示. 证明, 向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 与向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}\}$ 等价.

由题设, 存在 $k_1, \ldots, k_r \in F$ 使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 因为 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}\}$ 线性表示, 所以 $k_r \neq 0$. 移项可得

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} + \frac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}.$$

注 1. 题中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可能是线性相关的, 所以无法直接使用定理 6.3.2(替换定理).

注 2. 发现好几个同学写成

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} - \frac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}.$$

后来发现有的是抄习题解答所致. 还请这部分同学自己斟酌. 我只批改作业, 记录作业是否提交, 并不给作业打分.

补充. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,2).$$

将 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 排成一个矩阵, 通过行变换可得它的一个极大无关组含有三个向量. 并可取极大无关组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\0&1&3\\3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&3\\0&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}$$
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-3r_3}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

对于这个题目, 可以验证 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 中的任意三个都构成一个极大无关组.

对于一般的一组向量 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$. 假设它的一个极大无关组有 r 个向量. 根据推论 6.3.2, 它的任意一个极大无关组有 r 个向量. 但在 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中任意取 r 个向量不一定构成极大无关组.

6.4 基和维数

8. 设 W 是 n 维向量空间 V 的一个子空间, 且 $0 < \dim W < n$. 证明: W 在 V 中有不止一个余子空间.

设 W 的一个基为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. 由扩基定理, 存在 $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in V$ 使得 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 V 的基. 令 $W' = L(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$. 则 $V = W \oplus W'$.

再令 $W'' = L(\alpha_{r+1} + \alpha_1, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$. 则可以验证 $V = W \oplus W''$ 且 $W'' \neq W'$. 因此 W 在 V 中有不止一个余子空间.

注 1. 设 W 的一个基为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. 由扩基定理, 存在 $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in V$ 使得 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 V 的基. 令 W_1 是 W 的一个余子空间, 即 $V = W \oplus W_1$. 从这里无法得出 $\{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ 是 W_1 的基.

注 2. 部分同学直接考虑了 $V = F^n$. 按照定义, 数域 F 上的一个 n 维向量空间 V 就是满足一些线性关系的一个非空集合. 比如

$$F^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in F\}$$

是 F 上的一个 n 维向量空间. 再比如, 次数小于或等于 $n-1$ 的多项式构成的空间

$$\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in F\}$$

也是 F 上的一个 n 维向量空间. 因此数域 F 上的一个 n 维向量空间 V 不一定是 F^n.

注 3. 在叙述定理以及写证明的过程中, 如果某个记号首次出现, 需要先指明或定义它是什么.

6.5 坐标

4. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,5),\ \boldsymbol{\beta}_2=(-2,3,1),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,3,2).$$

证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基. 求前者到后者的过渡矩阵.

计算过程与本节例 5 一样: 先分别求出关于标准基的过渡矩阵. 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1).$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&-1\\-1&3&0\end{pmatrix}=:(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)A,$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&3&3\\5&1&2\end{pmatrix}=:(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B.$$

于是 $|A|=8$, $|B|=-34$. 从而

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B.$$

因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}&\frac{1}{2}&\frac{7}{4}\\\frac{9}{4}&\frac{1}{2}&\frac{5}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{5}{2}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

过渡矩阵的定义参见第 238 页.

```
% matlab验算
A = sym(...
[ 1   0   1
  2  -1  -1
 -1   3   0]);
B = sym(...
[ 2  -2   1
  1   3   3
  5   1   2]);
```

```
det(A)
det(B)
inv(A)*B
```

注. 以上 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 都是行向量, 且满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)A,\qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

取转置可得列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}}$ 之间的等式.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}})A.$$

注意区分以上四个等式.

6.6 向量空间的同构

> 2. 设 $f: V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个同构映射, V_1 是 V 的一个子空间. 证明 $f(V_1)$ 是 W 的一个子空间.

本题主要考察子空间的定义: 非空子集, 关于加法和数乘封闭.

因为 V_1 是 V 的子空间, 所以 V_1 不是空集. 从而 $f(V_1)$ 不是空集.

任取 $\beta_1, \beta_2 \in f(V_1)$, $k_1, k_2 \in F$. 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$ 使得 $f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$. 于是

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) = f(k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2) \in f(V_1).$$

6.7 矩阵的秩　齐次线性方程组的解空间

> 3. 设 A 是一个 m 行的矩阵, 秩$A = r$. 从 A 中任取出 s 行, 作一个 s 行的矩阵 B. 证明: 秩$B \geq r + s - m$.

不同的思维习惯会得到不一样的证明 (证不出来也是一种, 重在思考的过程, 就算证明 1 吧). 下面总结一下同学们的证明.

证明 1.

证明 2. 设 A 的行向量组为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. 取 A 的一个极大无关组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, 其余的 $m - r$ 个向量记作 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$.

由题目, A 中取了 s 行构成矩阵 B. 设 s_1 行在 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 中取, 其他 $s - s_1$ 行在 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$ 中取.

那么, 秩$B \geq s_1$ 且 $s - s_1 \leq m - r$. 于是, 秩$B \geq s_1 \geq r + s - m$.

注意下标. 比如, 也可将 A 的一个极大无关组记作 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$.

注意极大无关组与基的区别. 设 A 的行向量组为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

取 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 的一个极大无关组 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$. 则 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$ 是矩阵 A 的行空间 $\mathscr{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 的一个基.

证明 3. 部分同学采用了参考答案的证明. 感觉参考答案读起来有点绕, 以下重写一下该证明.

设 A 的行向量组为

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

设 B 的行向量组为

$$\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}.$$

设 B 的秩为 t, 则可取 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ 的一个极大无关组

$$\{\alpha_{i_{j_1}}, \ldots, \alpha_{i_{j_t}}\}.$$

将 $\{\alpha_{i_{j_1}}, \ldots, \alpha_{i_{j_t}}\}$ 扩充为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 的一个极大无关组, 需要添加 $r-t$ 个向量. 因为 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\} \backslash \{\alpha_{i_{j_1}}, \ldots, \alpha_{i_{j_t}}\}$ 中的向量都可以由 $\{\alpha_{i_{j_1}}, \ldots, \alpha_{i_{j_t}}\}$ 线性表出, 所以添加的 $r-t$ 个向量都在 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \setminus \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ 中. 从而 $r - t \leq m - s$.

证明 4. 在矩阵 A 中选了 s 行得到矩阵 B. 现在保留矩阵 A 中的这 s 行, 将其他 $m-s$ 行替换为零向量, 得到矩阵 $\widetilde{B}$; 将这 s 行替换为零向量, 保留其他 $m-s$ 行, 得到矩阵 $\widetilde{C}$. 则 $A = \widetilde{B} + \widetilde{C}$. 因为

$$\begin{aligned}
\text{秩}(\widetilde{B}) + \text{秩}(\widetilde{C}) = \text{秩}\begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{C} \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ \widetilde{B} & \widetilde{C} \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ \widetilde{B}+\widetilde{C} & \widetilde{C} \end{pmatrix} \\
\geq \text{秩}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{B}+\widetilde{C} & \widetilde{C} \end{pmatrix} \geq \text{秩}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{B}+\widetilde{C} & 0 \end{pmatrix} = \text{秩}(\widetilde{B}+\widetilde{C}),
\end{aligned}$$

所以 秩$(B) + m - s \geq$ 秩$(\widetilde{B})$ + 秩$(\widetilde{C}) \geq r$.

证明 5. 即证

$$\text{行}A - \text{秩}A \geq \text{行}B - \text{秩}B.$$

在矩阵 B 的基础上添加 $m-s$ 行, 行数会增加 $m-s$, 秩增加不超过 $m-s$. 所以上式成立.

7.2 线性变换的运算

6. 设 $F^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in F\}$ 是数域 F 上 n 维行空间. 定义

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

(i) 证明: σ 是 F^n 的一个线性变换, 且 $\sigma^n = \theta$;

(ii) 求 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 和 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的维数.

这里第一问有一个记号 θ, 很多同学搞不清. 在此解释一下不同的 "零".

在教材第 262 页上: 令 θ 表示 V 到自身的零映射, 称为 V 的零变换. 用集合的语言表示就是

$$\begin{aligned} \theta: \quad V &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{\alpha} &\longmapsto \mathbf{0}. \end{aligned}$$

在这个题目中取 $V = F^n$. 于是

$$\begin{aligned} \theta: \quad F^n &\longrightarrow F^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

数域 F 中的零	0
向量空间 V 中的零	$\mathbf{0}$ (手写时可写成 0, 或 $\vec{0}$)
向量空间 V 到自身的零映射	θ
零子空间	$\{\mathbf{0}\} \subset V$, $\{0\} \subset F$, $\{\theta\} \subset L(V)$
$F[x]$ 中的零多项式	$f(x) = 0$
行空间 F^n 中的零向量	$(0, \ldots, 0)$
$F^{m \times n}$ 中的零矩阵	$\boldsymbol{O}$ (也可写成 O, 或 $0_{m \times n}$)

7.3 线性变换和矩阵

5. 设 A 是数域 F 上一个 n 阶矩阵. 证明, 存在 F 上的一个非零多项式 $f(x)$ 使得 $f(A)=O$.

证明. 令 $M_n(F)$ 是数域 F 上全体 n 阶矩阵所成的向量空间. 因为

$$\dim(M_n(F))=n^2,$$

所以 $M_n(F)$ 中的任意 n^2+1 个矩阵线性相关.

因为 $I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ 线性相关, 所以存在 F 中 n^2+1 个不全为 0 的数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$ 使得 $a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = O$. 令

$$f(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_{n^2} x^{n^2}.$$

则 $f(x)$ 是一个非零多项式, 且 $f(A)=O$. □

- $f(A)$ 的定义在教材第 184 页.
- 根据 Cayley-Hamilton 定理, f 的特征多项式也满足题目要求, 而且次数更低, 为 n 次多项式. 当然, 它的证明也更加困难.

7.5 本征值与本征向量

1(ii). 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

求矩阵 A 在实数域内的特征根和相应的特征向量.

$f_A(x) = |xI - A| = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$.

A 在实数域内有特征根 1, 解方程可得相应的特征向量 $k(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

注. 按照特征向量的定义, 特征向量是非零向量. 所以要求 $k \in \mathbb{R}$ 且 $k \neq 0$.

5.

(i) 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上一个 n 阶矩阵. 证明: 存在 $\mathbb{C}$ 上 n 阶可逆矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix};$$

(ii) 对 n 作数学归纳法证明, 复数域 $\mathbb{C}$ 上任意一个 n 阶矩阵都与一个上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似, 这里主对角线以下的元素都是零.

这里给出 (i) 的两个证明, 注意本征向量与特征向量的区别.

(i) 证明 1. 设 λ_1 是 A 的一个特征根. 取 A 的属于 λ_1 的一个特征向

量 ξ_1 (n 行列向量). 即 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$ 且 $\xi_1\neq\mathbf{0}$. 将 ξ_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一个基 $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$.

对于 $k=1$, 我们有 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$.

对于 $k=2,\dots,n$, 设 $A\xi_k=b_{1k}\xi_1+\cdots+b_{nk}\xi_n$.

令 $T=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_n)$. 则

$$\begin{aligned}
AT&=(A\xi_1\ \ A\xi_2\ \ \cdots\ \ A\xi_n)\\
&=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\\
&=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因为 $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个基, 所以 T 可逆. 上式左乘 T^{-1} 可得 (i).

(i) 证明 2. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 维向量空间. 设 $\sigma:V\to V$ 是一个线性变换, 且 σ 在 V 的某一个基下的表示矩阵为 A.

设 λ_1 是 σ 的一个本征值. 取 σ 的属于 λ_1 的一个本征向量 ξ_1. 即 $\sigma(\xi_1)=\lambda_1\xi_1$ 且 $\xi_1\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 将 ξ_1 扩充为 V 的一个基 $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$.

对于 $k=1$, 我们有 $\sigma(\xi_1)=\lambda_1\xi_1$.

对于 $k=2,\dots,n$, 设 $\sigma(\xi_k)=b_{1k}\xi_1+\cdots+b_{nk}\xi_n$.

则

$$\begin{aligned}
(\sigma(\xi_1)\ \ \sigma(\xi_2)\ \ \cdots\ \ \sigma(\xi_n))&=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\\
&=:(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_n)B.
\end{aligned}$$

这里 =: 表示把出现的矩阵记为 B. 则 B 是 σ 在 V 的基 $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ 下的表示矩阵. 从而 A 与 B 相似.

因为 A 与 B 相似, 所以存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=B$.

注. 在 (i) 证明 2 中, 即使取 $V = \mathbb{C}^n$. A 的属于特征根 λ_1 的特征子空间与 σ 的属于本征值 λ_1 的本征子空间也可以是不同的. 试举例说明.

接下来给出 (ii) 的两个归纳法证明. 证明过程涉及多个不同型的矩阵, 注意它们的行数和列数.

(ii) 证明 1.

$n = 1, 2$ 时, 由 (i) 可得 (ii) 成立.

假设任意一个 n 阶矩阵都与一个上三角矩阵相似.

设 A 是一个 $n+1$ 阶矩阵. 由 (i), 存在 $n+1$ 阶可逆矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n+1} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n+1,2} & \cdots & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

记

$$b = (b_{1,2} \quad \cdots \quad b_{1,n+1}),$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{2,2} & \cdots & b_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n+1,2} & \cdots & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

由归纳假设, 存在 n 阶可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}BS$ 是一个上三角矩阵. 于是,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} T^{-1}AT \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \lambda_1 & bS \\ 0 & S^{-1}BS \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是一个上三角矩阵. 证毕.

(ii) 证明 2. 设 A 是一个 n 阶矩阵. 我们来归纳地证明对于 $k = 1, \ldots, n-1$, 存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 的前 k 列主对角线以下的元素都是零.

$k = 1$ 由 (i) 可得.

假设对于 $k \in \{1,2,\ldots,n-2\}$, 存在可逆矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \left(\begin{array}{cc} B & C \\ 0 & D \end{array}\right),$$

其中 B 是 k 阶上三角矩阵, C 是 $k \times (n-k)$ 型矩阵, D 是 $n-k$ 阶矩阵.

下面考虑 $k+1$ 的情况. 由 (i), 存在 $n-k$ 阶可逆矩阵 S 使得

$$S^{-1}DS = \left(\begin{array}{cc} \lambda & E \\ 0 & F \end{array}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{array}\right) T^{-1}AT \left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ 0 & S \end{array}\right) \\ =& \left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} B & C \\ 0 & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ 0 & S \end{array}\right) \\ =& \left(\begin{array}{cc} B & CS \\ 0 & S^{-1}DS \end{array}\right) \end{aligned}$$

的前 $k+1$ 列主对角线以下的元素都是零.

最后, 取 $k = n-1$ 可得 (ii).

下面我们看看 deepseek 会给出怎样的证明. 先把题目的 LaTeX 代码输入 deepseek. deepseek 回答后再让它生成答案的 LaTeX 代码.

```
% 7.5节第5题LaTeX代码
(i) 设$A$是复数域$\mathbb{C}$上一个$n$阶矩阵.
证明: 存在$\mathbb{C}$上$n$阶可逆矩阵$T$使得
$$T^{-1} A T = \left(\begin{array}{cccc}
\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0         & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots    & \vdots &        & \vdots \\
0         & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{array}\right); $$

(ii) 对$n$作数学归纳法证明, 复数域$\mathbb{C}$上任意一个$n$阶矩阵
都与一个上三角矩阵
$$\left(\begin{array}{cccc}
\lambda_1 & *         &\cdots & *         \\
0         & \lambda_2 &\cdots & *         \\
\vdots    & \vdots    &       & \vdots    \\
0         & 0         &\cdots & \lambda_n
```

```
\end{array}\right)$$
相似，这里主对角线以下的元素都是零.
```

(i) 证明

1. **特征向量构造**：由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，A 至少有一个特征值 λ_1 和对应的非零特征向量 $\mathbf{v}_1$（即 $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$）。

2. **基扩充**：将 $\mathbf{v}_1$ 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$。

   设 $T = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n]$，则 T 可逆。

3. **相似变换计算**：计算 $T^{-1}AT$ 的第一列：

   $$T^{-1}AT\mathbf{e}_1 = T^{-1}A\mathbf{v}_1 = T^{-1}(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{e}_1,$$

   其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$。

   因此 $T^{-1}AT$ 具有所需形式：

   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

(ii) 归纳证明

1. **基例**（$n = 1$）：一阶矩阵本身就是上三角形式，结论成立。

2. **归纳假设**：假设对所有 $k \leq n-1$ 阶矩阵，命题成立。

3. **归纳步骤**：由问题 (i)，存在可逆矩阵 T 使得：

   $$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

   其中 B 为 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。

   对 B 应用归纳假设，存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}BP$ 为上三角矩阵。

   令：

   $$Q = T\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & P \end{pmatrix},$$

则：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{b}^T P \\ \mathbf{0} & P^{-1}BP \end{pmatrix}$$

即为所求的上三角矩阵。

关键点说明

- 问题 (i) 通过特征向量构造相似变换，将矩阵的第一列化简
- 问题 (ii) 利用归纳法将高阶矩阵的三角化问题逐步降阶
- 复数域的代数封闭性保证了特征向量的存在性

助教点评: 回答得很好. 看来这种难度的题目问 AI 就行了.

7.6 可以对角化的矩阵

4. 数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换 σ 叫作一个对合变换, 如果 $\sigma^2 = \iota$, ι 是单位变换. 证明:

(i) σ 的本征值只能是 ± 1;

(ii) $V = V_1 \oplus V_{-1}$, 这里 V_1 是 σ 的属于本征值 1 的本征子空间, V_{-1} 是 σ 的属于本征值 -1 的本征子空间.

提示: 设 $\alpha \in V$, 则 $\alpha = \frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2} + \frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}$.

证明. (i) 设 λ 是 σ 的一个本征值, 取对应的一个本征向量 ξ. 则 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$ 且 $\xi \neq \mathbf{0}$. 一方面, $\sigma^2(\xi) = \sigma(\lambda\xi) = \lambda\sigma(\xi) = \lambda^2\xi$. 另一方面, $\sigma^2(\xi) = \iota(\xi) = \xi$. 联立得 $\lambda^2\xi = \xi$. 因为 $\xi \neq \mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$.

(ii) 任取 $\alpha \in V$. 由 $\sigma(\frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2}) = \frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2}$ 可得 $\frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2} \in V_1$. 由 $\sigma(\frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}) = -\frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}$ 可得 $\frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2} \in V_{-1}$. 因为 $\alpha = \frac{\alpha+\sigma(\alpha)}{2} + \frac{\alpha-\sigma(\alpha)}{2}$, 所以 $\alpha \in V_1 + V_{-1}$. 由 α 的任意性可得 $V \subset V_1 + V_{-1}$. 显然 $V_1 + V_{-1} \subset V$. 因此, $V = V_1 + V_{-1}$.

任取 $\alpha \in V_1 \cap V_{-1}$. 则 $\sigma(\alpha) = \alpha$ 且 $\sigma(\alpha) = -\alpha$. 从而 $\alpha = \mathbf{0}$. 因此, $V_1 \cap V_{-1} = \{\mathbf{0}\}$.

因此, $V = V_1 \oplus V_{-1}$. □

总结

- 这个题目看起来不是很困难. 但很少有同学能把证明准确地写下来: 没有区分本征向量与特征向量; 没强调 $\xi \neq \mathbf{0}$; 验证 $V = V_1 \oplus V_{-1}$ 时没有说明 $V_1 \cap V_{-1} = \{\mathbf{0}\}$; 数学表达不规范; ...
- 由 (i) 可得对合变换 σ 的本征值只能是 ± 1, 但无法知道 σ 是不是有本征值. 由 (ii) 可得对合变换 σ 的确有本征值.
- 本小节的标题是可对角化的矩阵. 那么对合变换 σ 是不是可对角化的?

8.1 向量的内积

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是欧氏空间的 n 个向量. 行列式

$$G(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\begin{vmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{vmatrix}$$

叫作 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 的格拉姆 (Gram) 行列式. 证明 $G(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ 当且仅当 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性相关.

证明一.

$\Longrightarrow$. 设 $G(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$. 则存在 $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 使得

$$\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\\ \vdots\\ \langle\alpha_n,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\\ &\qquad=\sum_{j=1}^n k_j\langle\alpha_j,\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\rangle=0.\end{aligned}$$

因此 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 因为 $k_1,\dots,k_n$ 不全为 0, 所以 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性相关.

$\Longleftarrow$. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性相关. 则存在 $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 使得

$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 因此,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\\ \vdots\\ \langle\alpha_n,k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因为 $k_1,\ldots,k_n$ 不全为 0, 所以 $G(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$.

证明二.

由推论 8.2.1, 不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}^n$. 这时 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 可看做 n 行的列向量. 因此

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\\ =&A^{\mathrm{T}}A.\end{aligned}$$

这里 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$. 于是 $G(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=|A^{\mathrm{T}}A|=|A|^2$. 从而 $G(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$, 当且仅当 $|A|=0$, 当且仅当 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关.

8.2 正交基

3. 令 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组线性无关的向量, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 是由这组向量通过正交化方法所得的正交组. 证明, 这两个向量组的格拉姆行列式相等 [8.1 习题 7], 即

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = G(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \langle \beta_2, \beta_2 \rangle \cdots \langle \beta_n, \beta_n \rangle.$$

证明一.

由正交化方法得

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \alpha_k, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

从而

$$\alpha_k = \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \alpha_k, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j \right) + \beta_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

令

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} & \cdots & \frac{\langle \alpha_n, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle \alpha_n, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n) = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n) Z.$$

令

$$X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix}.$$

下面验证

$$X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = Z^{\mathrm{T}} \, X(\beta_1, \ldots, \beta_n) \, Z.$$

将 Z 的第 i 行第 j 列的元素记作 z_{ij}. 下面计算 $Z^{\mathrm{T}} \, X(\beta_1, \ldots, \beta_n) \, Z$ 的第 i

行第 j 列,

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} z_{1i} & z_{2i} & \cdots & z_{ni} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\langle \beta_1, \beta_1 \rangle & \langle \beta_1, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \beta_1, \beta_n \rangle \\
\langle \beta_2, \beta_1 \rangle & \langle \beta_2, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \beta_2, \beta_n \rangle \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\langle \beta_n, \beta_1 \rangle & \langle \beta_n, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \beta_n, \beta_n \rangle
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_{1i} & z_{2i} & \cdots & z_{ni} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\langle \beta_1,\ z_{1j}\beta_1 + \cdots + z_{nj}\beta_n \rangle \\
\langle \beta_2,\ z_{1j}\beta_1 + \cdots + z_{nj}\beta_n \rangle \\
\vdots \\
\langle \beta_n,\ z_{1j}\beta_1 + \cdots + z_{nj}\beta_n \rangle
\end{pmatrix} \\
&= \langle z_{1i}\beta_1 + \cdots + z_{ni}\beta_n,\ z_{1j}\beta_1 + \cdots + z_{nj}\beta_n \rangle \\
&= \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle.
\end{aligned}
$$

这说明 $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = Z^{\mathrm{T}}\ X(\beta_1, \ldots, \beta_n)\ Z$. 因此

$$
\begin{aligned}
G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= |Z^{\mathrm{T}}|\ G(\beta_1, \ldots, \beta_n)\ |Z| \\
&= G(\beta_1, \ldots, \beta_n) \\
&= \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \langle \beta_2, \beta_2 \rangle \cdots \langle \beta_n, \beta_n \rangle.
\end{aligned}
$$

证明二.

由推论 8.2.1, 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$. 这时 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 可看做 n 行的列向量. 由正交化方法得

$$
\alpha_k = \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \alpha_k, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j \right) + \beta_k, \quad k = 1, \ldots, n.
$$

令

$$
Z = \begin{pmatrix}
1 & \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} & \cdots & \frac{\langle \alpha_n, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \\
0 & 1 & \cdots & \frac{\langle \alpha_n, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

则

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} Z.
$$

令

$$X(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}X(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\\ &=Z^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}Z\\ &=Z^{\mathrm{T}}\,X(\beta_1,\dots,\beta_n)\,Z.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}G(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=|Z^{\mathrm{T}}|\,G(\beta_1,\dots,\beta_n)\,|Z|\\ &=G(\beta_1,\dots,\beta_n)\\ &=\langle\beta_1,\beta_1\rangle\langle\beta_2,\beta_2\rangle\cdots\langle\beta_n,\beta_n\rangle.\end{aligned}$$

10. 设 U 是一个正交矩阵. 证明:

(i) U 的行列式等于 1 或 -1;

(ii) U 的特征根的模等于 1;

(iii) 如果 λ 是 U 的一个特征根, 那么 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 U 的一个特征根;

(iv) U 的伴随矩阵 U^* 也是正交矩阵.

(ii) 设 λ 为 U 的一个特征根, α 为 U 的属于 λ 的特征向量. 则 $U\alpha=\lambda\alpha$ 且 $\alpha\neq\mathbf{0}$. 注意

$$U\in M_n(\mathbb{R})\subset M_n(\mathbb{C}),\ \lambda\in\mathbb{C},\ \alpha\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}.$$

在 $U\alpha=\lambda\alpha$ 的两边取共轭可得 $U\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}$. 再取转置可得 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 因此

$$\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}U\alpha=\overline{\lambda}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\lambda\alpha.$$

于是 $(\overline{\lambda}\lambda-1)\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha=0$. 因为 $\alpha\neq\mathbf{0}$, 所以 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha\neq 0$. 从而 $|\lambda|^2=\overline{\lambda}\lambda=1$, 即 $|\lambda|=1$.

注意, 如果不取共轭, 我们只能得到 $(\lambda^2-1)\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=0$. 由于 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 可能是零, 故无法得出 $\lambda^2-1=0$. 例如, 对于

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},$$

我们有 $\alpha\neq\mathbf{0}$, 且 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1^2+i^2=0$.